Курсова работа
по математика
спец. психология - I курс

1 зад. Пресметнете стойността на детерминантите от II ред:

а) $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ б) $D = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ в) $D = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$

г) $D = \begin{vmatrix} \dfrac{1+t^2}{1-t^2} & \dfrac{2t}{1-t^2} \\ \dfrac{2t}{t^2-1} & \dfrac{1+t^2}{t^2-1} \end{vmatrix}$

2 зад. Пресметнете стойността на детерминантите от III ред:

а) $D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 5 & 9 & 11 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ б) $D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

в) $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ г) $D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 \\ -3 & 3 & a \end{vmatrix}$

д) $D = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

е) $D = \begin{vmatrix} a & m & n \\ -m & b & p \\ -n & -p & c \end{vmatrix}$

ж) $D = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$

3 зад. Проверете, че матрицата:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ е неособена

б) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ е особена

(Упътване: матрицата е особена, ако детерминантата ѝ е нула и е неособена, ако детерминантата ѝ е $\neq 0$)

4 зад. Да се решат системите с формулите на Крамер:

а) $\begin{vmatrix} 3x + y = 3 \\ x + 2y = -4 \end{vmatrix}$

б) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = -4 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - 2z = -3 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$

Решение на б): Пресмятаме $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$

Тя е образувана от коефициентите пред x, y, z в съответните редове. D_1 намираме, като на мястото на коефициентите пред x поставяме свободните членове. Аналогично намираме D_2 и D_3:

$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -30 \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -15$

Съгласно формулите на Крамер:

$x = \frac{D_1}{D} = \frac{15}{15} = 1 \qquad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-30}{15} = -2 \qquad z = \frac{D_3}{D} = -\frac{15}{15} = -1$

5 зад. Да се определи при какво значение на параметъра λ величините x, y, z определени от дадената система, образуват аритметична прогресия.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ \lambda x + y - z = 0 \\ x + 2y + \lambda z = 17 \end{cases}$$

6 зад. Намерете лицето на ΔABC, върховете на който са с координати:

а) $A(1;-1)$ $B(2;1)$ $C(-2;3)$

б) $A(2;-3)$ $B(1;1)$ $C(1;2)$

Решение на а): Ориентираното лице на ΔABC намираме по формулата: $S_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

$$S'_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6+1+2+2+2-3 = 10$$

7 зад. Определете координатите на т. M, която дели отсечката AB: $A(1;-3)$; $B(-2;3)$ в отношение $\lambda=2$.

8 зад. Намерете разстоянието между точките

а) $A(2;-1)$ $B(-3;1)$ б) $A(1;-7)$ $B(-3,-4)$

в) $A(-2;-5)$ $B(4,8)$ г) $A(1;1)$ $B(11,2)$

Решение на а): $d_{AB} = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} =$

$= \sqrt{(-3-2)^2+(1+1)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

9зад. А) Дадени са точките $A(1;-1)$, $B(2,5;3)$, $C(-2;2)$. Да се напише уравнението на правата, която минава през т. A и е а) успоредна на BC, б) перпендикулярна на BC; в) сключва с BC ъгъл $\frac{\pi}{6}$

В). Напишете общото уравнение на права ℓ, която минава през т. $A(1;1)$ и е а) успоредна на права g: $3x-5y+1=0$ б) перпендикулярна на g.

Решение на А):

а) $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \Leftrightarrow y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot x+\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot x_1+y_1\right)$

$\Rightarrow k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $\qquad k_{BC}=\frac{2-3}{-2-2,5}=\frac{2}{9}$

Тъй-като правата $g_1 \ni A$ и $g_1 \parallel BC \Rightarrow k_{g_1}=k_{BC}=\frac{2}{9}$

$g_1 \ni A(1;-1) \Rightarrow g_1: y+1=\frac{2}{9}(x-1) \Leftrightarrow g_1: 2x-9y-11=0$

б) k_2 на $g_2 \perp BC$: от $k_2 \cdot k_{BC}=-1 \Rightarrow k_2=-1\cdot\frac{9}{2}=-\frac{9}{2}$

$g_2 \ni A \Rightarrow g_2: y-(-1)=-\frac{9}{2}(x-1) \Leftrightarrow g: 9x+2y-7=0$

в) $k_3 \to g_3$ сключва $\angle\frac{\pi}{6}$ с BC $\qquad tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$

$tg\frac{\pi}{6}=\pm\frac{k_3-\frac{2}{9}}{1+\frac{2}{9}k_3} \Rightarrow k_3'=\frac{9\sqrt{3}+6}{27-2\sqrt{3}}$; $k_3''=\frac{6-9\sqrt{3}}{27+2\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ има две прави:

$g_3': (9\sqrt{3}+6)x+(2\sqrt{3}-27)y-33-7\sqrt{3}=0$

$g_3'': (9\sqrt{3}-6)x+(27+2\sqrt{3})y+33-7\sqrt{3}=0$

10 зад. Дадени са матриците:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Да се намерят матриците:

а) $A+B$ б) $2A-B$ в) $3A-2B$ г) $A.B$